Акимушкин Василий Александрович,
Акимушкина Ирина Николаевна,
Поздняков Сергей Николаевич

АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

Прежде чем формулировать алгоритм Дейкстры строго, обсудим его неформально на примере «задачи спелеологов».

Спелеологи, оснащенные портативными эхолотами и рациями для связи, исследуют разветвленную пещеру. Для того чтобы ускорить перемещение по лабиринту подземных ходов, они решили проложить бечевки, ведущие от входа ко всем перекресткам лабиринта (рис. 1).

Для того, чтобы движение от входа к каждому перекрестку происходило по кратчайшему пути, спелеологи разработали такой алгоритм.

Первый спелеолог остается у входа и с помощью эхолота определяет коридор, ведущий от входа до ближайшего перекрестка, и направляет туда второго спелеолога, который протягивает бечевку от входа до данного перекрестка, фиксируя её длину и помечая этим числом перекресток. Далее он зондирует длины отходящих от перекрестка коридоров и, если оказывается, что суммарный путь от входа до ближайшего к нему перекрестка меньше, чем длины непройденных коридоров, ведущих непосредственно от входа, он вызывает третьего спелеолога, который протягивает бечевку дальше. Теперь уже третий спелеолог измеряет длины возможных продвижений по отходящим от его перекрестка коридорам и выбирает (связываясь по рации с коллегами, оставшимися у входа и на первом перекрестке) по какому из коридоров идти, чтобы длина бечевки от входа была минимальной. На этот перекресток отправляют четвертого спелеолога и т. д. (рис. 2).

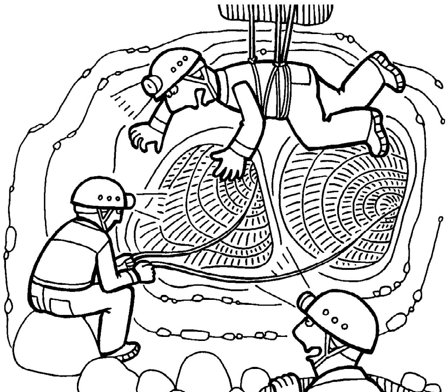

Рис. 1

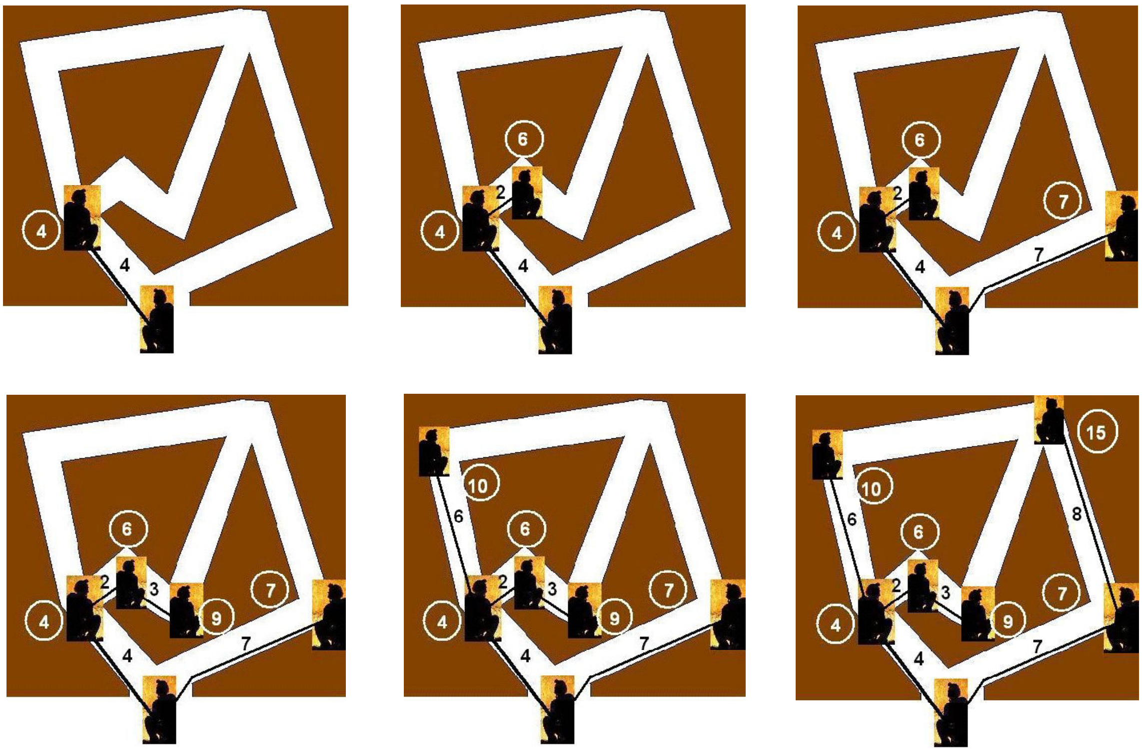

Рис. 2

Разумеется, для такой работы понадобится столько спелеологов, сколько перекрестков в лабиринте, хотя можно справиться и одному, но тогда придется возвращаться к пройденным перекресткам и вести таблицу, чтобы не забыть величины пометок при выборе наименьшей. Именно такую таблицу нужно будет заполнить при изучении работы алгоритма Дейкстры с помощью предлагаемого манипулятора.

Алгоритм Дейкстры решает задачу нахождения кратчайшего пути от одной вершины графа до всех остальных. Граф пещеры строится так: вершины графа соответствуют перекресткам, а ребра графа – коридорам между ними. Одна из вершин выделяется и называется источником. В случае с пещерой – это вход в неё. Каждому ребру графа присваивается неотрицательное число – вес ребра. В случае пещеры это длины коридоров (рис. 3).

Далее заполняется таблица пометок, позволяющая на каждом шаге алгоритма находить новую вершину графа с кратчайшим расстоянием до источника (будем называть их обработанными) и вычислять расстояния от источника до вершин, смежных обработанным (см. листинг 1).

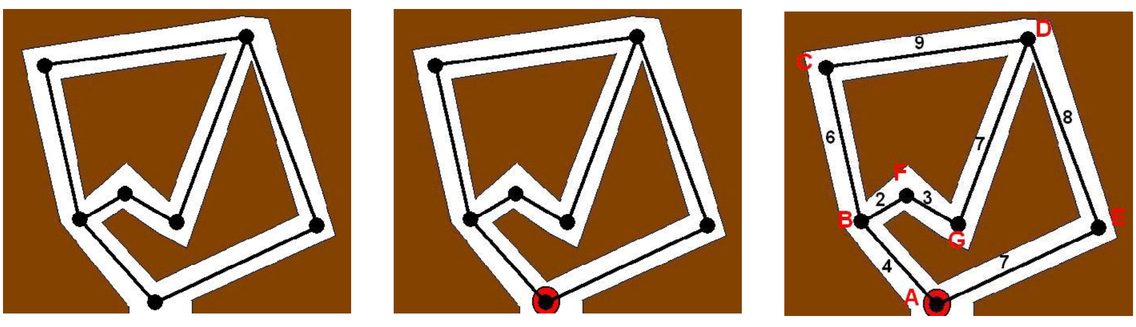

Рис. 3

Листинг 1

```
АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ:
ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ (задание переменным начальных значений)
СЧИТАТЬ ИСТОЧНИК ОБРАБОТАННОЙ ВЕРШИНОЙ, ВСЕ ОСТАЛЬНЫЕ НЕОБРАБОТАННЫМИ
ПОМЕТИТЬ ВЕРШИНЫ, СМЕЖНЫЕ ИСТОЧНИКУ, ДЛИНАМИ РЕБЕР К НИМ ОТ ИСТОЧНИКА:
     ЦИКЛ ПО V – всем вершинам графа, кроме источника
          D(V):= P(S;V) длина ребра от S до V
      (P(S;V) считается бесконечно большим, если ребра из S до V нет)
ОСНОВНОЙ ЦИКЛ
ЦИКЛ ПОКА ЕСТЬ НЕОБРАБОТАННЫЕ ВЕРШИНЫ
  НАЙТИ НЕОБРАБОТАННУЮ  ВЕРШИНУ С МИНИМАЛЬНОЙ ПОМЕТКОЙ U И ПЕРЕНЕСТИ
                                                  ЕЁ В ОБРАБОТАННЫЕ
  ЦИКЛ ПО W –НЕОБРАБОТАННЫМ ВЕРШИНАМ ГРАФА СМЕЖНЫМ С U
    ЕСЛИ D(W)>D(U)+P(U;W) ТО D(W):= D(U)+P(U;W) КОНЕЦ ЕСЛИ
    (пересчет кратчайших расстояний до вершин, смежных обработанным, по
     путям, проходящим только через обработанные промежуточные вершины)
  КОНЕЦ ЦИКЛА
КОНЕЦ ЦИКЛА
```

Окончательные значения пометок D(V) являются искомыми кратчайшими расстояниями от источника S до вершин V.

Для «задачи спелеологов» таблица пометок будет меняться следующим образом (табл. 1).

Замечание. Для экономии места в манипуляторе алгоритма Дейкстры пользователю видны только две строчки таблицы: предыдущая и заполняемая. Этого достаточно, так как для заполнения очередной строчки нужно знать только значения пометок и длины ребер графа.

В заключение обсудим идею доказательства корректности алгоритма Дейкстры.

Теорема. *Алгоритм Дейкстры находит кратчайшие расстояния от источника до всех вершин графа, если веса ребер графа положительны.*

Доказательство

Докажем по индукции промежуточное утверждение (лемму) о том, что на каждом шаге алгоритм находит вершину с кратчайшим расстоянием до источника (очередная обработанная вершина), а пометки остальных вершин есть кратчайшие расстояния от источника по путям, проходящим только через обработанные промежуточные вершины.

База индукции следует из этапа инициализации. Действительно, в качестве обра-

Табл. 1

A	B	C	D	E	F	G
	4			7		
		10		7	6	
		10		7		9
		10	15			9
		10	15			
			15			

ботанной вершины выбирается источник, расстояние до которого заведомо известно (равно нулю). В качестве пометок остальных вершин берутся расстояния до них по ребрам, исходящим из источника. У этих путей промежуточной вершиной является только одна вершина – сам источник.

Индукционный переход.

Предположим, что после k шагов утверждение верно. Докажем, что после ещё одного шага цикла справедливость утверждения сохранится. Сначала объясним, почему до вершины с минимальной пометкой не существует пути, длина которого меньше значения пометки (рис. 4).

Пусть пометка вершины U, выбранная как минимальная из всех пометок на данном шаге, не является длиной кратчайшего пути. Построим тогда гипотетический минимальный путь, который пройдет через другую

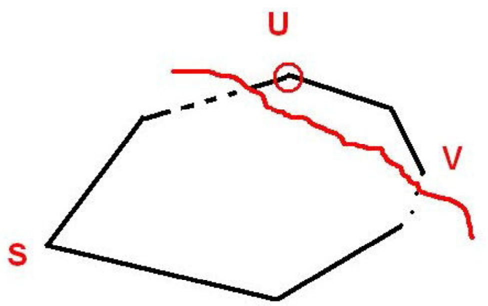

Рис. 4

обработанную вершину V (которая является последней обработанной среди вершин этого пути). Тогда длину пути L(S;U) можно разбить на две части L(S;V) + L(V;U).

Первое слагаемое совпадает с пометкой вершины D(V) по индукционному предположению. Но пометка D(U) не больше пометки D(V) по алгоритму, который всегда выбирает минимальную пометку, а L(V;U) > 0, так как длины ребер положительны. Таким образом, новый путь оказывается длиннее того, который строит алгоритм Дейкстры, и сделанное предположение неверно.

Вторая часть доказательства не требует, так как алгоритм Дейкстры специально написан так, чтобы пометки необработанных вершин всегда обозначали кратчайшие расстояния по путям, проходящим только через обработанные промежуточные вершины. Для каждой новой обработанной вершины это свойство проверяется и, если оно не выполняется, то пометки изменяются.

Доказательство закончено.

В предлагаемой на этом занятии задаче вы встретитесь с другой интерпретацией графа: веса ребер будут показывать время проезда по улицам города в часы пик. Алгоритм Дейкстры позволит оперативно передавать водителям информацию о том, как быстрее добраться до любой точки (перекрестка) города.

Акимушкин Василий Александрович, аспирант математико-механического факультета СПбГУ, программист АНО «КИО»,

Акимушкина Ирина Николаевна, заместитель начальника отдела графического дизайна ОАО «Научно-инженерный центр Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета»,

Поздняков Сергей Николаевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ», научный руководитель Интернет-школы современной информатики и дискретной математики.